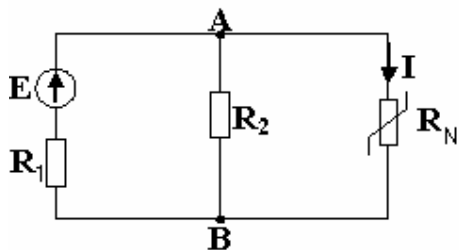


Zadanie 1

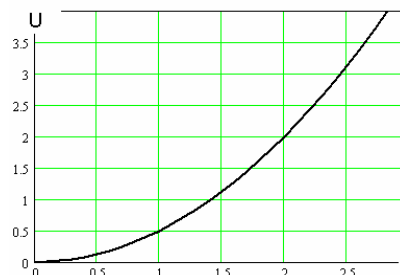
Obliczyć wartość prądu I oraz napięcie U na rezystancji nieliniowej $R(I)$, której charakterystyka napięciowo-prądowa jest wyrażona wzorem

a) $U=0.5I^2$.

Dane: $E=10V$ $R_1=2\Omega$ $R_2=1\Omega$

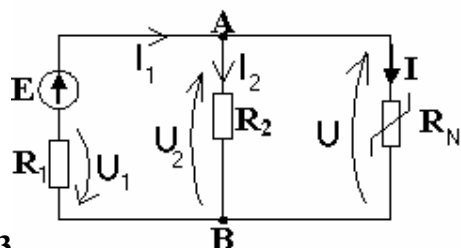


Rys 1



Rys 2

1. metoda analityczna



Rys 3

Oznaczamy prądy i spadki napięć jak na powyższym rysunku. Możemy zapisać:

$$U = U_{AB} = U_2 \quad (\text{dla węzłów A i B})$$

$$U_2 - E + U_1 = 0 \quad (\text{dla spadków napięć w lewym oczku})$$

oraz:

$$I_1 = I_2 + I \quad (\text{dla węzła A})$$

Wiedząc, że $U = \frac{1}{2}I^2$ (z danych zadania) możemy podstawiając do zapisanych powyżej

równań otrzymać:

$$\frac{1}{2}I^2 - E + R_1(I_2 + I) = 0$$

ponieważ:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{2R_2}I^2$$

otrzymujemy ostatecznie równanie postaci:

$$\frac{1}{2}I^2 - E + R_1\left(\frac{1}{2R_2}I^2 + I\right) = 0$$

czyli:

$$I^2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + I \cdot R_1 - E = 0$$

z czego można obliczyć wartość prądu I dla określonej wartości SEM E :

$$I_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(R_2 + R_1)} \left[-2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 2 \cdot (R_1^2 \cdot R_2^2 + 2 \cdot E \cdot R_2^2 + 2 \cdot E \cdot R_2 \cdot R_1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2(R_2 + R_1)} \left[-2 \cdot R_1 \cdot R_2 - 2 \cdot (R_1^2 \cdot R_2^2 + 2 \cdot E \cdot R_2^2 + 2 \cdot E \cdot R_2 \cdot R_1) \right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Otrzymane wartości prądów:

$$I_1 = 2$$

$$I_2 = -3.3$$

Pod uwagę bierzemy dodatnią wartość prądu. Czyli prąd $I = 2$ A.

Dla tak wyznaczonego prądu obliczamy wartość napięcia:

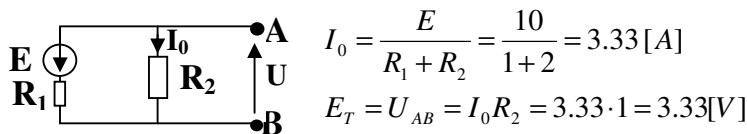
$$U = \frac{1}{2} I^2 = \frac{1}{2} 4 = 2 \text{ V}$$

Wyznaczona wartość prądu i napięcia stanowi punkt pracy elementu nieliniowego pracującego przy zasilaniu SEM $E = 10$ V.

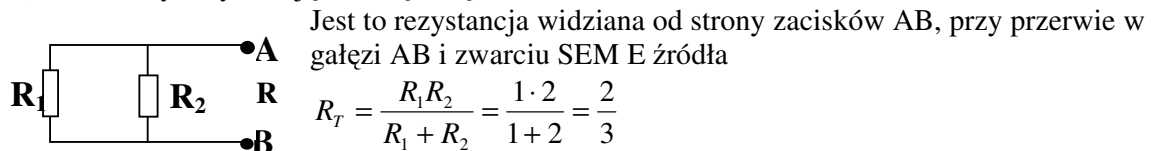
2. metoda graficzna – prostej oporu

Rozpoczynamy od wyznaczenia zastępczego źródła Thevenina dla obwodu na lewo od zacisków AB – czyli po odłączeniu rezystancji nieliniowej.

1) Obliczamy wartość napięciowego źródła Thevenina

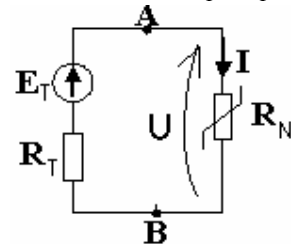


2) Obliczamy rezystancję wewnętrzną



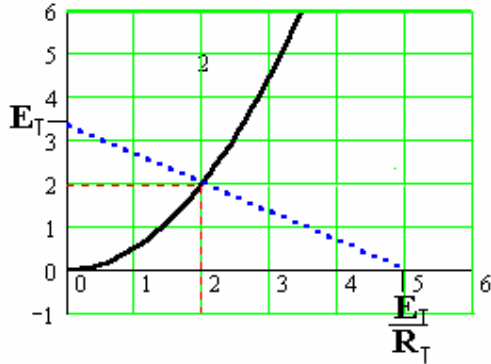
3) Obliczamy prąd I metodą prostej oporu

Po obliczeniu R_T i E_T schemat naszego obwodu można zastąpić:



Na wykresie rysujemy zależność napięcia od prądu dla elementu nieliniowego, oraz odwróconą charakterystykę drugiego elementu (dla elementu liniowego połączonego ze źródłem jest to prosta łącząca punkt o wartości E_T na osi napięć oraz punkt o wartości $\frac{E_T}{R_T}$ na

osi prądów) Tak powstały wykres przedstawiono poniżej



Punkt określony przez przecięcie tych dwóch wykresów wyznacza punkt pracy układu. Możemy odczytać:
 $I=2A$, $U=2V$

Co potwierdza obliczenia dokonane wcześniej metodą analityczną.

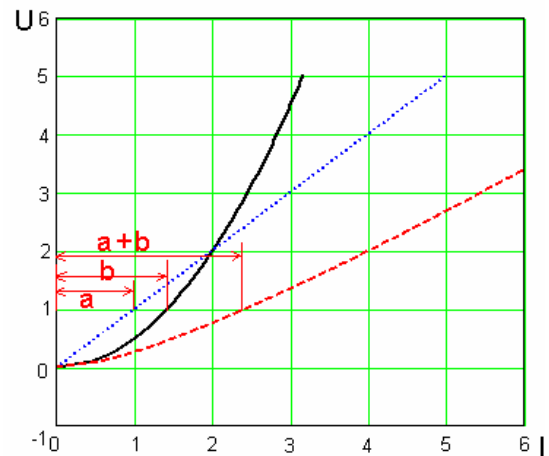
3. Metoda graficzna sumowania charakterystyk.

Metoda ta polega na sumowaniu kolejno prądów lub napięć dla zachowanej stałej wartości odpowiednio napięcia lub prądu. Dla połączenia elementów:

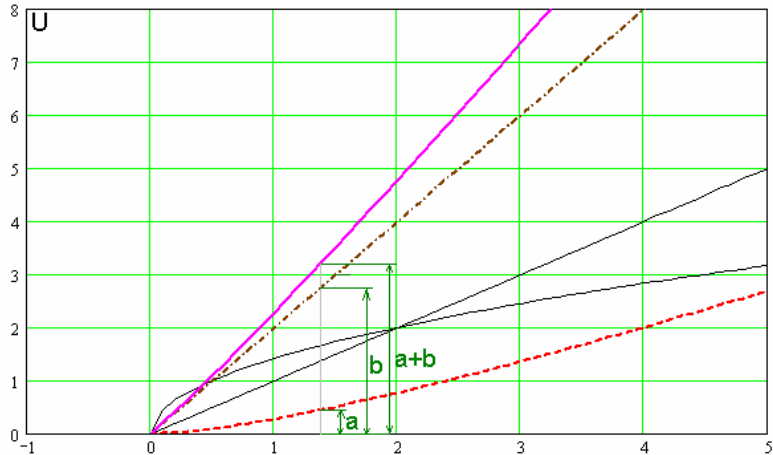
- Szeregowego – dodajemy ich charakterystyki w ten sposób, że sumujemy napięcia na elementach dla kolejnych wartości prądu
- Równoległego – dodajemy ich charakterystyki w ten sposób, że sumujemy prądy na elementach dla kolejnych wartości napięć

Dla omawianego przypadku:

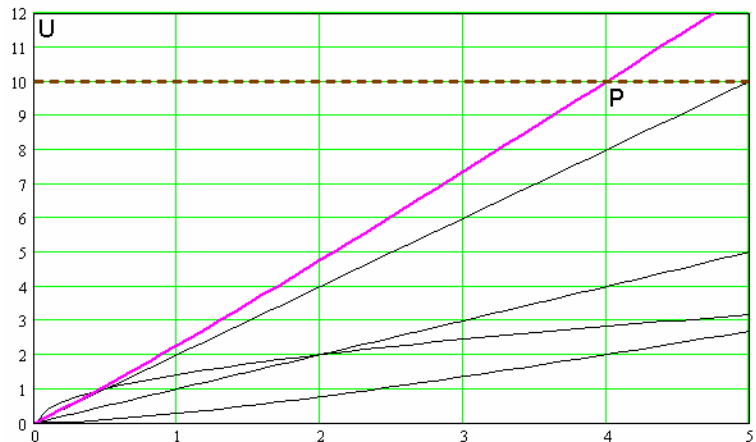
Zaczynając od elementu nieliniowego, nanosimy jego charakterystykę ($U = \frac{1}{2}I^2$ - linia ciągła czarna) a następnie charakterystykę połączonego z nim równolegle rezystora R_2 ($U = R_2I = 1I$ niebieska, kropkowana). Następnie wyznaczamy sumę charakterystyk (linia kreskowana – czerwona, powstała w sposób pokazany na rysunku). W ten sposób uzależniliśmy napięcie U od sumy prądów $I+I_2$ czyli od prądu I_1 (oznaczenia wg rys 3).



W kolejnym etapie będziemy dodawać napięcie U do napięcia U_1 , dzięki czemu otrzymamy zależność pomiędzy spadkami napięć w oczku lewym (rys 3) oraz prądem I_1 . W tym celu rysujemy na wykresie charakterystykę prądowo-napięciową dla rezystora R_2 ($U = R_1I = 2I$ Kropka-kreska, brązowa) i dodajemy do uzyskanej przez chwilę charakterystyki (czerwona, kreskowana). (W celu rozjaśnienia rysunku pozostałe wcześniejsze charakterystyki zaznaczono czarnymi cienkimi liniami ciągłymi). Powstała charakterystyka zaznaczona jest pogrubioną ciągłą linią różową (sposób otrzymania tej charakterystyki zaznaczono na rys).



Na zakończenie wyrysowujemy linię określającą wartość napięcia źródła. Punkt P – przecięcia uzyskanej charakterystyki (różowa, ciągła) z charakterystyką źródła (brązowa przerywana) wyznacza wartość prądu I_1 , czyli prądu płynącego przez oczko lewe (rys3), dla którego wyznaczone są przecinające się charakterystyki.



Wyznaczając kolejne punkty (zaznaczone na wykresie) – wyznaczamy w odwrotnej kolejności wartości prądów i napięć z odpowiednich dla nich charakterystyk:

I_1 – punkt P. $I_1 = 4A$

Dla prądu I można odczytać spadki napięć, które on wywołuje (czyli U_1)

U_1 – punkt P1 – Przecięcie wartości prądu $\Leftrightarrow I_1=4$ z prostą wyznaczającą zależność napięcia na rezystorze R_2 od płynącego przez ten rezystor prądu (I_1). $U_1=8V$

U – punkt P2 – przecięcie wartości prądu $\Leftrightarrow I_1=4$ z zależnością na wartość napięcia U od prądu I_1 (linia czerwona, przerywana) $U=2V$

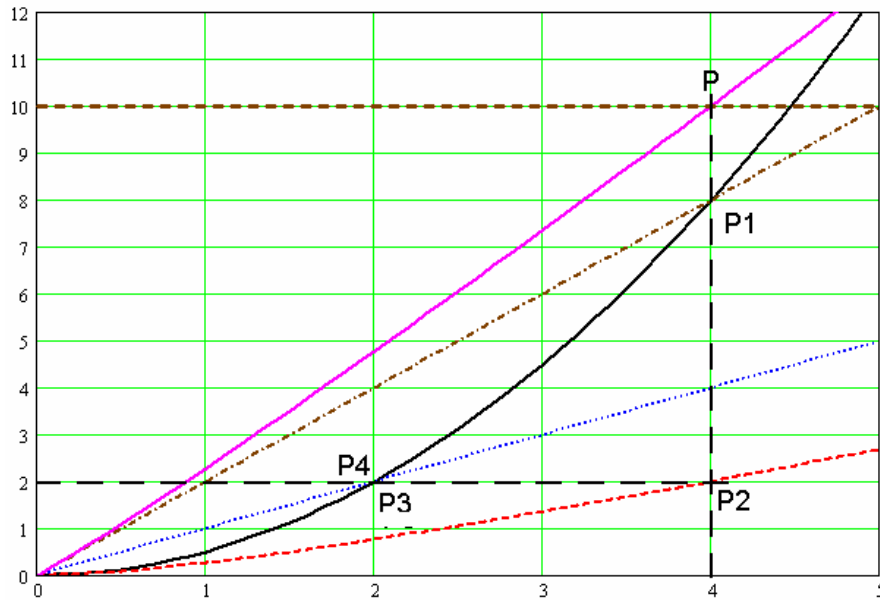
Następnie dla wyznaczonego napięcia U możemy odczytać prądy w gałęziach na których spadek napięcia wynosi U :

I_2 – punkt P3 – Przecięcie wartości napięcia $\Leftrightarrow U=2$ z prostą wyznaczającą zależność napięcia na rezystorze R_1 od płynącego przez ten rezystor prądu I_2 (niebieska kropkowana).

$I_2=2A$

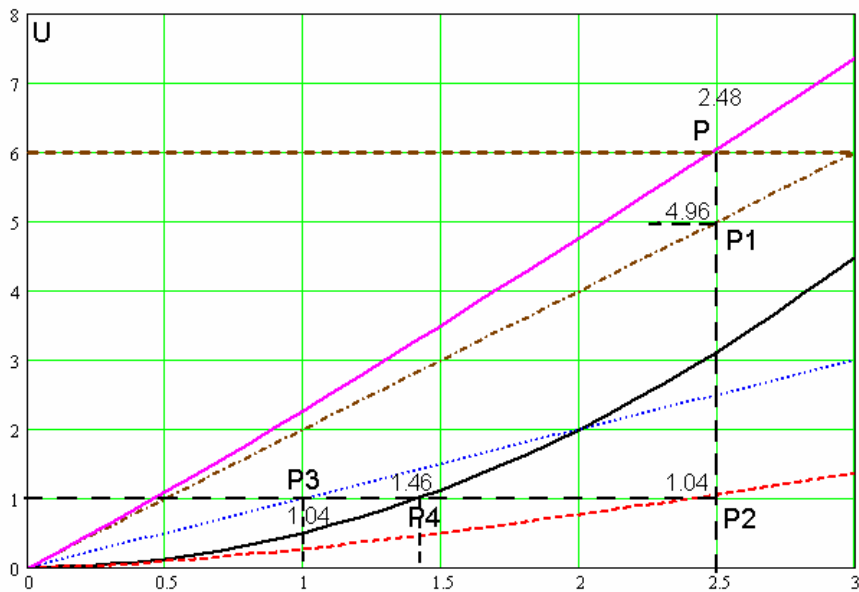
I – punkt P4 – Przecięcie wartości napięcia $\Leftrightarrow U=2V$ z krzywą wyznaczającą zależność napięcia na rezystorze nieliniowym R_N od płynącego przez ten rezystor prądu (I_N), czyli

krzywą: $U = \frac{1}{2} I^2$ (czarna ciągła) $I=2A$.



Dla danych podanych w zadaniu punkt P3 i P4 znajdują się w tym samym miejscu. Punkt P4 oznacza punkt pracy rezystancji nieliniowej ($U=2V$, $I=2A$)

Poniżej przedstawiono analogiczny wykres powstały dla danych $E=6V$, $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$.



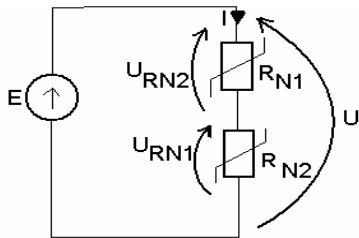
- P: (2.48, 6) $\Rightarrow I_1=2.48A$
- P1: (2.48, 4.96) $\Rightarrow U_1=4.96V$
- P2: (2.48, 1.04) $\Rightarrow U=1.04V$
- P3: (1.04, 1.04) $\Rightarrow I_2=1.04A$
- P4: (1.46, 1.04) $\Rightarrow I=1.46A$

Uwagi:

1. Przedstawione metody można łączyć, np. stosując Tw. Thevenina w metodzie analitycznej, lub Tw. Thevenina a następnie metodę sumowania charakterystyk dla obwodu jak na rys 6 itp.
2. Charakterystyka U-I (napięciowo – prądowa $\Leftrightarrow I=f(U)$) elementu nieliniowego może być podana w postaci wzoru – jak w przykładzie lub tabeli – kolejne odpowiadające sobie wartości U i I)
3. Może się zdarzyć inne oznaczenie osi – oś pionowa I, oś pozioma U – charakterystyka prądowo napięciowa I-U $\Leftrightarrow U=f(I)$. Trzeba wtedy zauważyć, że sumowanie napięć będzie się odbywać w poziomie, a sumowanie prądów w pionie (czyli odwrotnie niż w podanym przykładzie)
4. W sposób podany w punkcie 3 można także sumować charakterystyki dwóch elementów nieliniowych.(Przykład poniżej)

Przykład 2

Obliczyć punkt pracy układu:



Gdzie:
 $E=2V$,

R_{N1} :

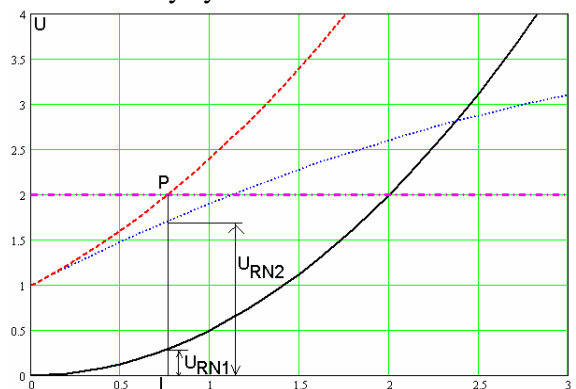
$$U_{RN1} = 0.5I^2$$

R_{N2} :

$$U_{RN2} = -0.1I^2 + 1$$

Dodajemy napięcia dla kolejnych prądów obu charakterystyk nieliniowych, punkt pracy-P Wyznacza prąd $I=0.76A$ oraz napięcie $U=E=2V$, dla prądu I odczytujemy spadki napięć na rezystancjach nieliniowych $U_{RN1} = 0.3 V$, oraz $U_{RN2} = 1.7 V$

Dla charakterystyki I-U



Dla charakterystyki U-I

