

TWIERDZENIE THEVENINA

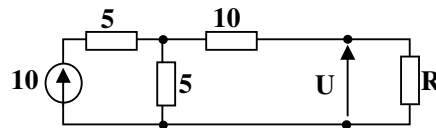
Każdy liniowy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci źródła napięcia o sile elektromotorycznej równej napięciu między rozwartymi zaciskami wyjściowymi dwójnika aktywnego.

Rezystancja wewnętrzna tego źródła jest równa rezystancji tego dwójnika po usunięciu wszystkich źródeł energii.

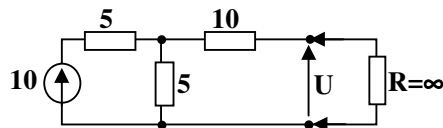
Usunięcie źródeł energii rozumiemy jako zwarcie źródeł napięcia oraz rozwarcie źródeł prądowych. Ze względu na to, iż każdy obwód elektryczny można traktować jako dwójnik aktywny względem dwóch zacisków, każdy taki obwód można zastąpić właśnie zastępczym źródłem napięcia względem tej pary zacisków.

ZADANIE 1

W układzie należy zastąpić układ poprzez jedno źródło napięciowe o rezystancji R_w . Wyjściem układu jest spadek napięcia U na rezystancji R .



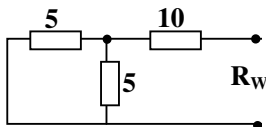
1) obliczamy wartość napięcia źródła, zastępując rezystancję R rozwarciem (rezystancja nieskończenie duża obliczamy wartość napięcia U z dzielnika napięcia (przez rezystor 10-omowy prąd nie płynie):



$$\frac{U}{10} = \frac{5}{5+5} \Rightarrow \frac{U}{10} = \frac{5}{10} \Rightarrow U = 5$$

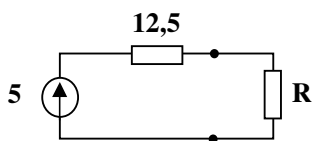
Wobec tego wartość napięcia U wynosi 5 [V].

2) obliczamy rezystancję widzianą z zacisków wyjściowych przy zwartych źródłach napięciowych. Gdyby były źródła prądowe należałoby je rozewrzeć.



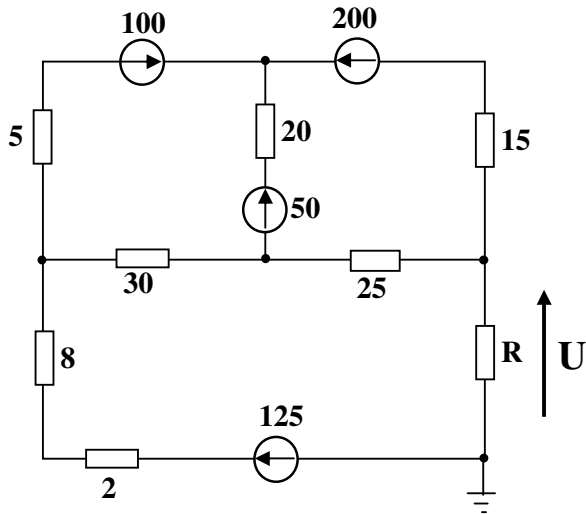
$$R_w = 10 + (5 \parallel 5) = 10 + \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 12,5 \Omega$$

Zgodnie z twierdzeniem Thevenina układ można zastąpić źródłem napięciowym o rezystancji R_w jak na poniższym rysunku.



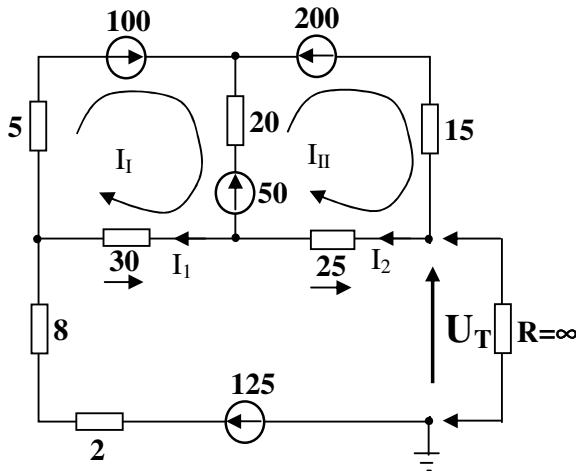
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 2



Należy zastąpić układ poprzez jedno źródło napięciowe o rezystancji R_w .
Wyjściem układu jest spadek napięcia U na rezystancji R .

1) obliczamy wartość napięcia źródła. Rezystancję R zastępujemy rozwarciem, obliczamy oba prądy oczkowe, a następnie wartość napięcia U jako:



$$U_T = 125 + I_1 \cdot 30 + I_2 \cdot 25$$

Metodą prądów oczkowych otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 100 - 50 \\ 50 - 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 20 + 30 & -20 \\ -20 & 20 + 15 + 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50 \\ -150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & -20 \\ -20 & 60 \end{vmatrix} = 3300 - 400 = 2900$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 50 & -20 \\ -150 & 60 \end{vmatrix} = 3000 - 3000 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 55 & 50 \\ -20 & -150 \end{vmatrix} = -8250 + 1000 = -7250$$

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{2900} = 0$$

$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7250}{2900} = -2,5$$

skąd po obliczeniu $I_1 = I_I = 0$ oraz $I_2 = I_{II} = -2,5$ [A]

$$U_T = 125 + 0 \cdot 30 + (-2,5) \cdot 25 = 125 - 62,5 = 62,5$$
 [V]

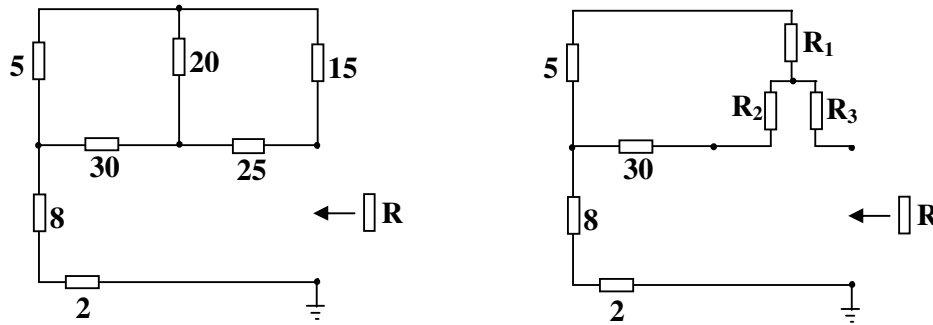
$$U_T = 62,5$$
 [V]

TWIERDZENIE THEVENINA

2) obliczamy rezystancję widzianą z zacisków wyjściowych przy zwartych źródłach napięciowych. W przypadku źródeł prądowych należałoby je rozewrzeć.

korzystamy z przekształcenia "trójkąt - gwiazda".

Zmodyfikowany układ przedstawia poniższy schemat:



$$R_1 = \frac{20 \cdot 15}{20 + 15 + 25} = \frac{300}{60} = 5$$

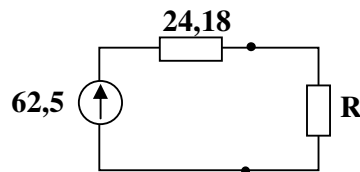
$$R_2 = \frac{20 \cdot 25}{20 + 15 + 25} = \frac{500}{60} = 8,33$$

$$R_3 = \frac{15 \cdot 25}{20 + 15 + 25} = \frac{375}{60} = 6,25$$

obliczamy R_T jako:

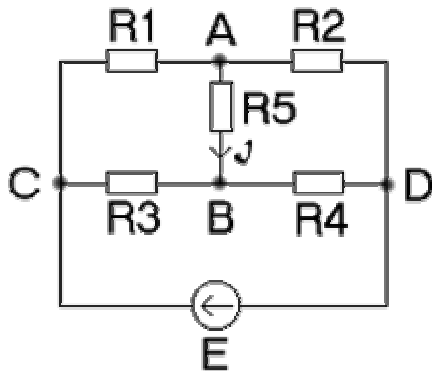
$$R_T = R_3 + (R_1 + 5) \parallel (R_2 + 30) + 10 = 6,25 + \frac{(5+5) \cdot (8,33+30)}{5+5+8,33+30} + 10 = 6,25 + \frac{383,3}{48,33} + 10 = 16,25 + 7,93 = 24,18[\Omega]$$

Zgodnie z twierdzeniem Thevenina układ można zastąpić źródłem napięciowym U_T o rezystancji R_T jak na poniższym rysunku.



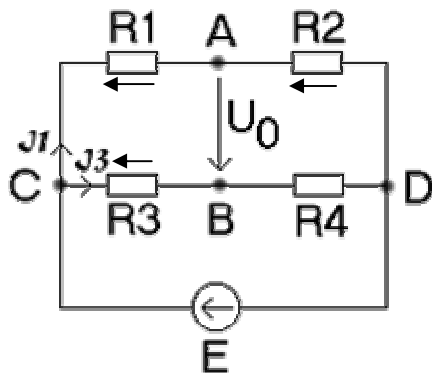
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 3



W układzie jak na rysunku poniżej należy obliczyć natężenie prądu I płynącego przez rezystor R_5 .

Stosując twierdzenie Thevenina zastąpimy układ przez źródło napięciowe. Jako zaciski wyjściowe przyjmujemy zaciski A,B jak na poniższym rysunku.



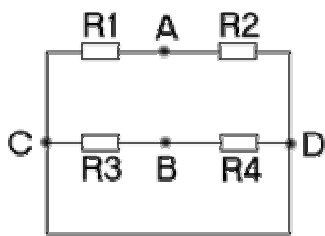
Obliczamy wartości prądów I_1 oraz I_3 jako:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4}$$

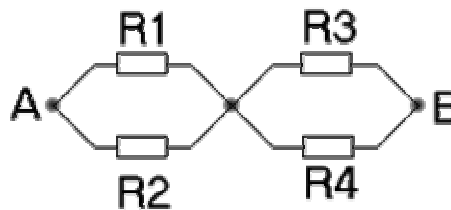
oraz napięcie U_0 :

$$U_0 = R_1 * I_1 - R_3 * I_3 = \frac{-R_2 * R_3 + R_1 * R_4}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4)} * E$$

Obliczamy rezystancję widzianą z zacisków wyjściowych przy zwartych źródłach napięciowych.



Ze względu na to, iż zaciski C,D są zwarte, układ można przedstawić w prostszej postaci.



$$R_0 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 * R_4}{R_3 + R_4}$$

Szukany prąd wyznaczamy jako: $I = \frac{U_0}{R_0 + R_5}$

Wstawiając obliczone wartości otrzymujemy ostateczny wzór:

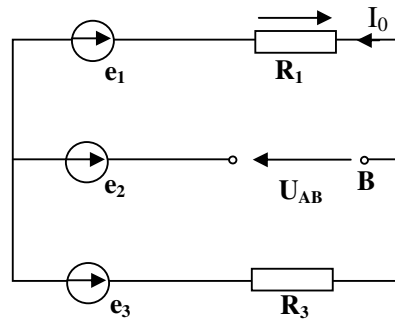
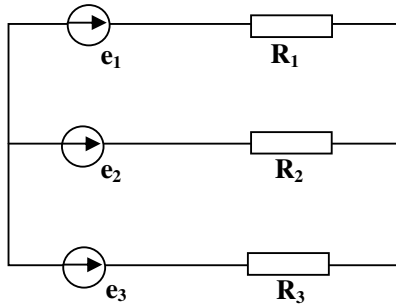
$$I = \frac{E * (-R_2 * R_3 + R_1 * R_4)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}$$

TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 4

Obliczyć natężenie prądu I_2 w poniższym schemacie stosując twierdzenie Thevenina. Obliczenia przeprowadzić dla liczb ogólnych.

Stosując twierdzenie Thevenina
zastąpimy układ przez źródło napięciowe.



Rozwiązanie:

$$U_{AB} - e_2 + e_1 + U_1 = 0$$

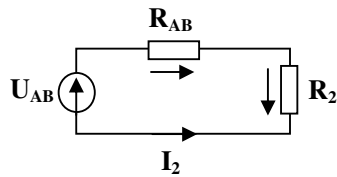
$$U_{AB} = e_2 - e_1 - U_1$$

$$U_1 = I_0 \cdot R_1$$

$$I_0 = \frac{e_1 - e_3}{R_1 + R_3}$$

$$U_{AB} = e_2 - e_1 - \frac{e_1 - e_3}{R_1 + R_3} R_1$$

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$



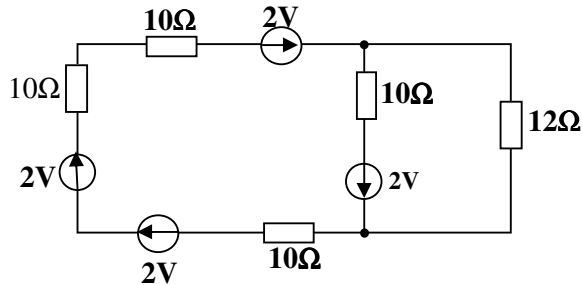
$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_{AB} + R_2}$$

$$I_2 = \frac{e_2 - e_1 - \frac{e_1 - e_3}{R_1 + R_3} R_1}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2}$$

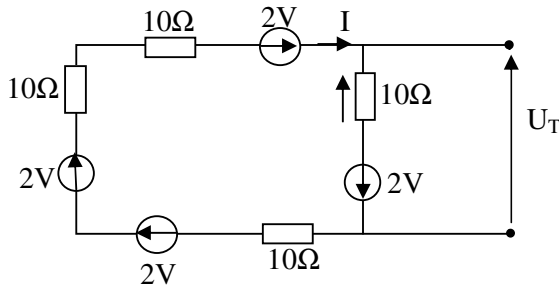
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 5

Stosując twierdzenie Thevenina obliczyć prąd płynący przez opór o wartości 12Ω w poniższym układzie.



Obliczamy wartość napięcia U_T



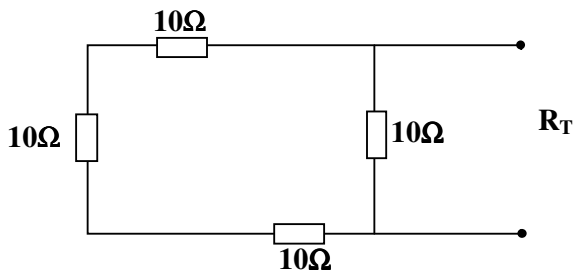
$$U_T - I \cdot 10 + 2 = 0$$

$$U = 10I - 2$$

$$I = \frac{2 + 2 + 2 + 2}{10 + 10 + 10 + 10} = \frac{8}{40} = 0,2[A]$$

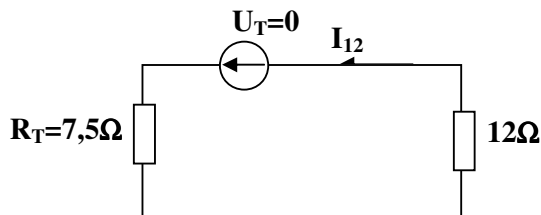
$$U_T = 0,2 \cdot 10 - 2 = 0$$

Obliczamy wartość R_T



$$R_T = \frac{(10 + 10 + 10) \cdot 10}{30 + 10} = \frac{300}{40} = 7,5[\Omega]$$

Obliczamy prąd płynący przez opór 12Ω

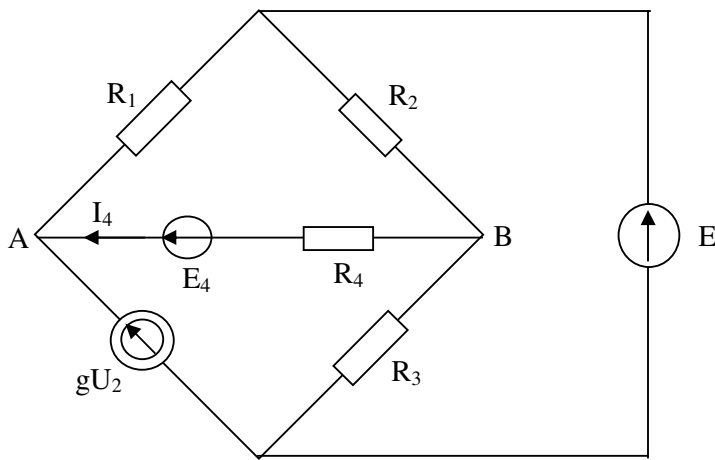


$$I_{12} = \frac{0}{7,5 + 12} = \frac{0}{19,5} = 0[A]$$

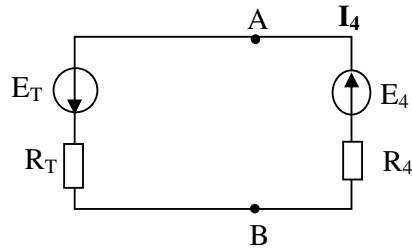
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 6

Oblicz metodą Thevenina prąd I_4

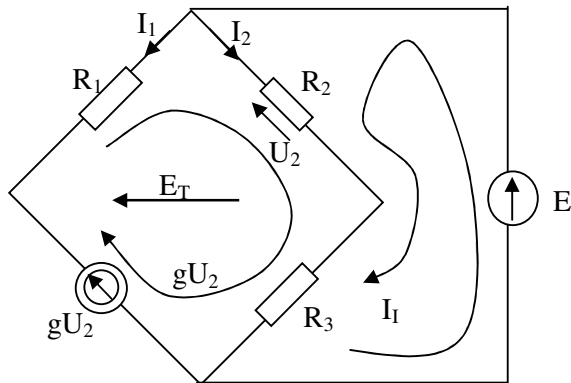


- $E=18V$
- $E_4=10V$
- $R_1=2\Omega$
- $R_2=3\Omega$
- $R_3=6\Omega$
- $R_4=8\Omega$
- $g=2S$
- $I_4=?$



$$I_4 = \frac{E_T + E_4}{R_T + R_4}$$

Obliczamy wartość napięcia E_T



$$\begin{aligned} I_1(R_1 + R_3) + gU_2(R_2 + R_3) &= E \\ U_2 &= I_2 \cdot R_2 = (I_1 + gU_2)R_2 \\ U_2 &= I_1 \cdot 3 + 2 \cdot 3U_2 \\ -5U_2 &= 3 \cdot I_1 \\ U_2 &= -\frac{3}{5}I_1 \\ 9I_1 + 2(-\frac{3}{5})I_1 \cdot 9 &= 18 \\ 9I_1 - 10,8I_1 &= 18 \end{aligned}$$

$$-1,8I_1 = 18 \Rightarrow I_1 = -10A \Rightarrow U_2 = 6V$$

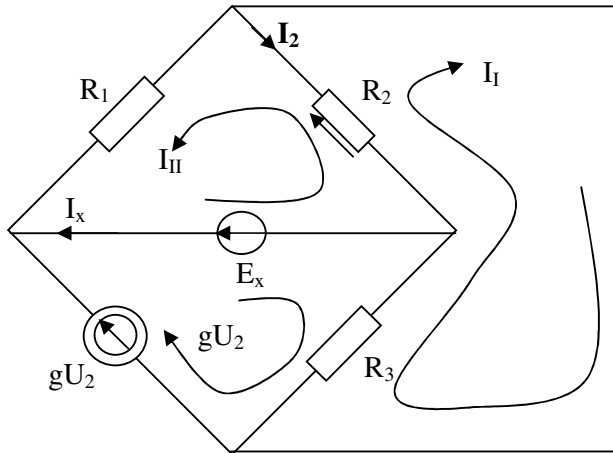
$$I_1 = -gU_2 = -2 \cdot 6 = -12[A] \quad U_1 = I_1 \cdot R_1 = -12 \cdot 2 = -24[V]$$

$$E_T + U_2 - U_1 = 0 \Rightarrow E_T = U_1 - U_2 = -24 - 6 = -30[V]$$

$E_T = -30V$

TWIERDZENIE THEVENINA

Obliczamy wartość R_T



$$R_T = \frac{E_x}{I_x}$$

$$I_x = -gU_2 - I_{II}$$

$$E_x = 1V$$

$$\begin{cases} I_I(R_2 + R_3) + I_{II}R_2 - gU_2R_3 = 0 \\ I_I(R_2) + I_{II}(R_1 + R_2) = -E_x \end{cases}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = (-I_I - I_{II}) \cdot 3 = -3(I_I + I_{II})$$

$$\begin{cases} 9I_I + 3I_{II} + 2 \cdot 3(I_I + I_{II}) \cdot 6 = 0 \\ 3I_I + 5I_{II} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9I_I + 3I_{II} + 36(I_I + I_{II}) = 0 \\ 3I_I + 5I_{II} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45I_I + 39I_{II} = 0 \\ 3I_I + 5I_{II} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_I = \frac{-39I_{II}}{45} = -0,87I_{II} \\ -3 \cdot 0,87I_{II} + 5I_{II} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_I = -0,87I_{II} \\ 2,39I_{II} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_I = 0,36 \\ I_{II} = -0,42 \end{cases}$$

$$U_2 = -3(0,36 - 0,42) = 0,18$$

$$I_x = -gU_2 - I_{II} = -2 \cdot 0,18 + 0,42 = -0,36 + 0,42 = 0,06$$

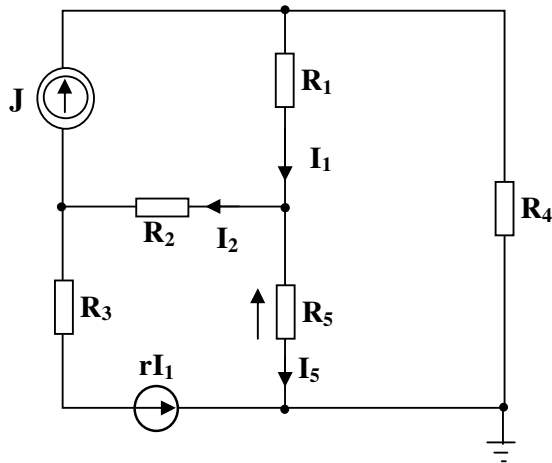
$$R_T = \frac{E_x}{I_x} = \frac{1}{0,06} = 16,67$$

$$I_4 = \frac{E_T + E_4}{R_T + R_4} = \frac{-30 + 10}{16,67 + 8} = \frac{-20}{24,67} = -0,81[A]$$

TWIERDZENIE THEVENINA

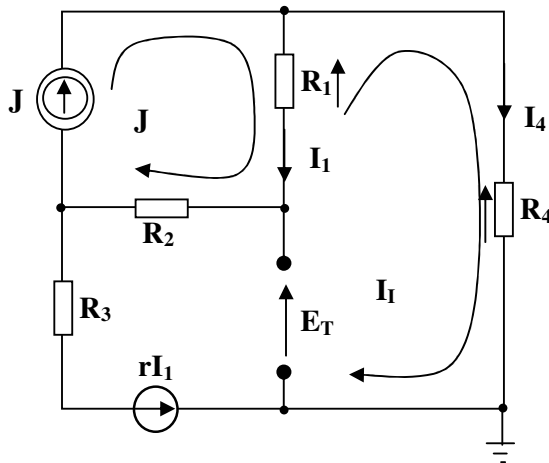
ZADANIE 7

Obliczyć Theveninem I_5



$$\begin{aligned} J &= 0,5\text{A} \\ R_1 &= R_2 = 4\Omega \\ R_3 &= R_4 = 6\Omega \\ R_5 &= 16\Omega \\ r &= 15\Omega \end{aligned}$$

$E_T = ?$



$$I_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - J(R_1 + R_2) = -rI_1$$

$$I_1 = J - I_1 = 0,5 - I_1$$

$$20I_1 - 0,5 \cdot 8 = -15 \cdot (0,5 - I_1)$$

$$20I_1 - 15I_1 = 4 - 7,5$$

$$5I_1 = -3,5$$

$$I_1 = -0,7$$

$$I_1 = 0,5 + 0,7 = 1,2$$

$$E_T + I_1 R_1 - I_4 R_4 = 0$$

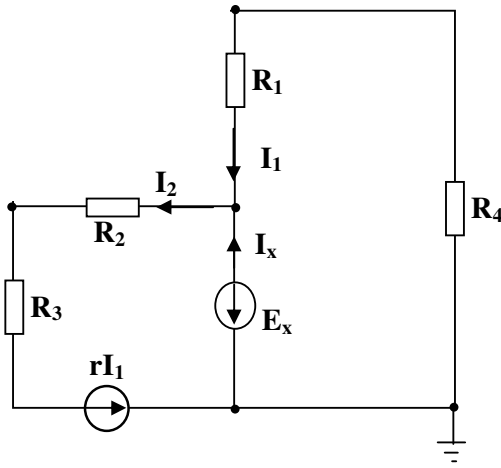
$$E_T = I_4 R_4 - I_1 R_1 = I_1 R_4 - (J - I_1) R_1$$

$$E_T = -0,7 \cdot 6 - (0,5 + 0,7) \cdot 4 = -4,2 - 4,8 = -9$$

$$E_T = -9\text{V}$$

TWIERDZENIE THEVENINA

$R_T = ?$



$$E_x = 1V$$

$$U_1 = E_x \frac{R_1}{R_1 + R_4} = 1 \frac{4}{4 + 6} = 0,4[V]$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{0,4}{4} = 0,1[A]$$

$$rI_1 = 15 * 0,1 = 1,5V$$

$$I_2 = \frac{rI_1 - E_x}{R_2 + R_3} = \frac{1,5 - 1}{4 + 6} = \frac{0,5}{10} = 0,05[A]$$

$$I_x + I_1 = I_2 \quad \Rightarrow \quad I_x = I_2 - I_1 = 0,05 - 0,1 = -0,05A$$

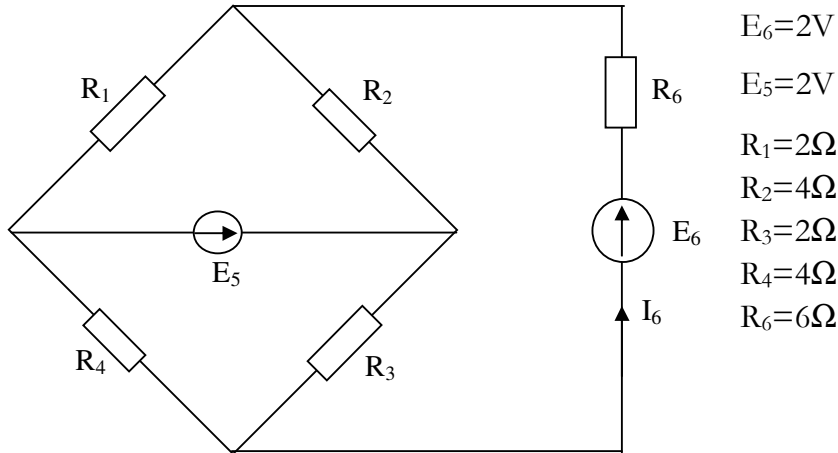
$$R_T = \frac{E_x}{I_x} = \frac{1}{0,05} = 20[\Omega]$$

$$I_5 = \frac{E_T}{R_T + R_5} = \frac{-9}{20 + 16} = \frac{-9}{36} = 0,25[A]$$

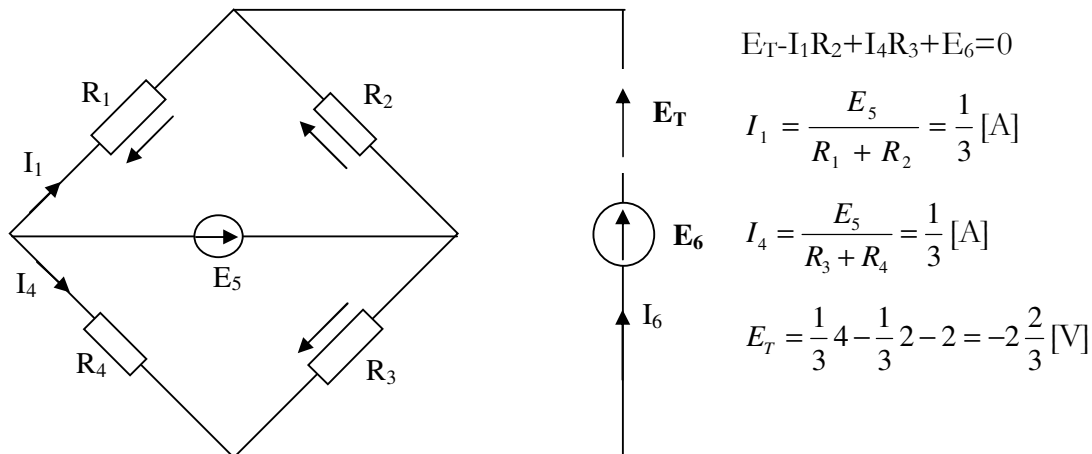
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 8

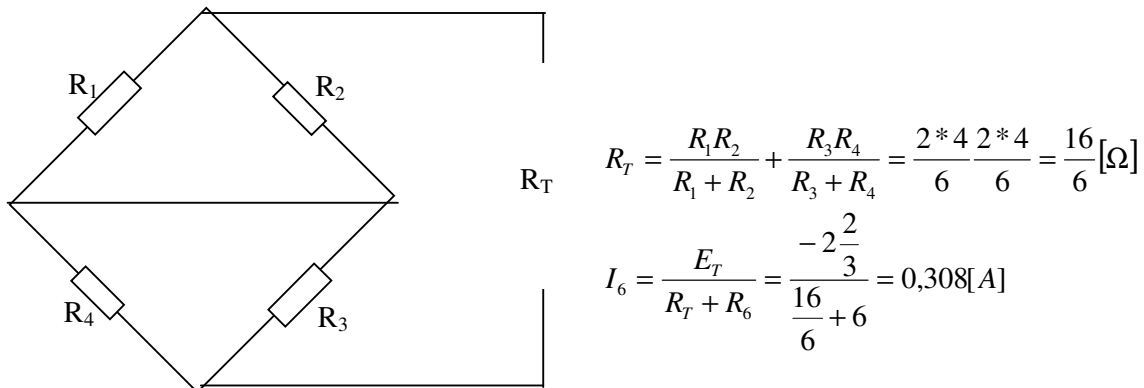
Stosując zasadę Thevenina obliczyć prąd I_5



$E_T=?$



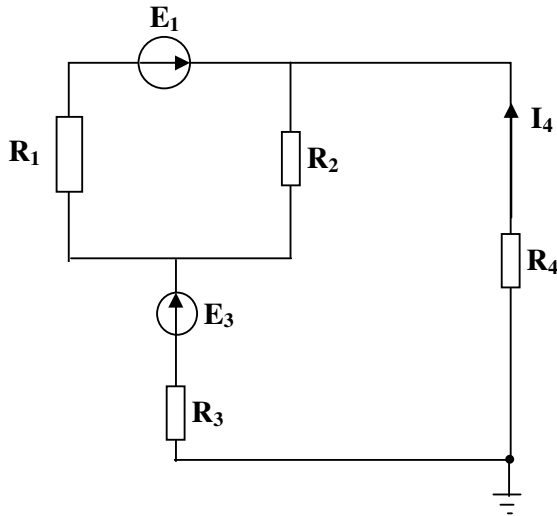
$R_T=?$



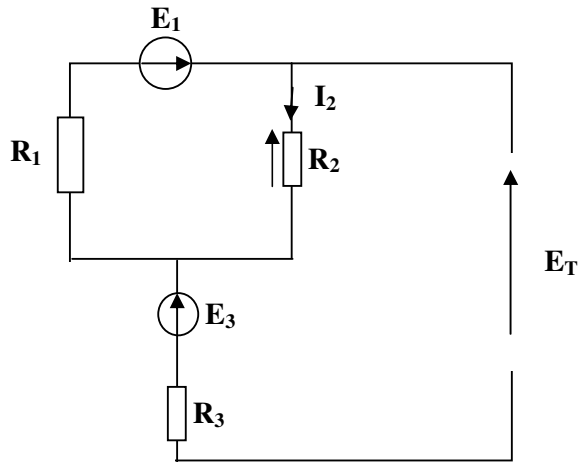
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 9

Stosując twierdzenie Thevenina obliczyć moc wydzielaną na oporze R_4 w układzie:



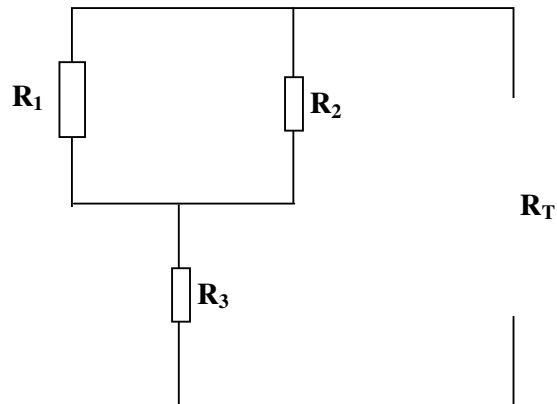
$$\begin{aligned} R_1 &= 7\Omega \\ R_2 &= 2\Omega \\ R_3 &= 3\Omega \\ R_4 &= 2\Omega \\ E_1 &= 23\text{V} \\ E_3 &= 3\text{V} \\ P &= I_4^2 R_4 \end{aligned}$$



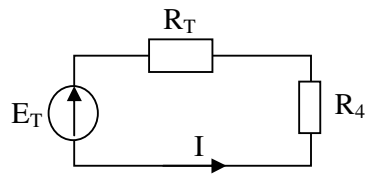
$$\begin{aligned} E_T - U_2 - E_3 &= 0 \\ E_T &= U_2 + E_3 \\ E_T &= I_2 R_2 + E_3 \\ I_2 &= \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{23}{7 + 2} = \frac{23}{9} \\ E_T &= \frac{23}{9} \cdot 2 + 3 = 8,1[\text{V}] \end{aligned}$$

TWIERDZENIE THEVENINA

$R_T = ?$



$$R_T = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3 + \frac{7 * 2}{7 + 2} = 4,56[\Omega]$$



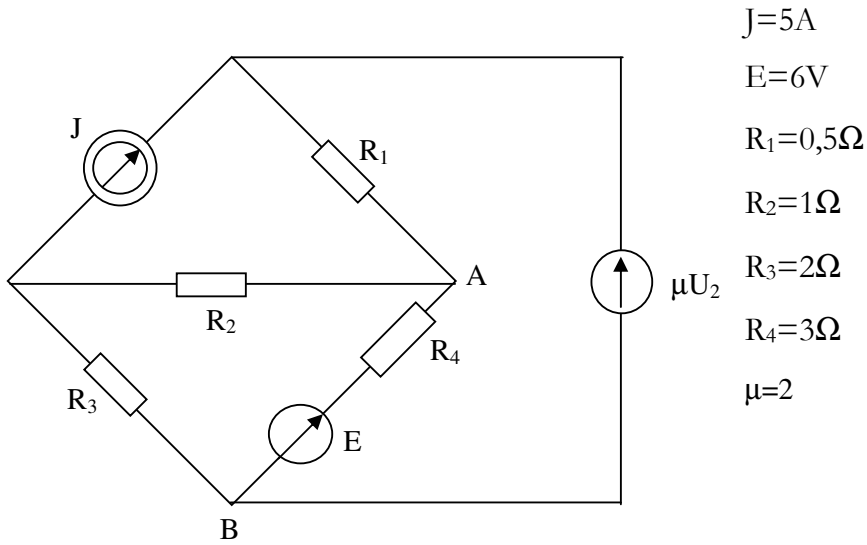
$$I = \frac{E_T}{R_T + R_4} = \frac{8,1}{4,56 + 2} = 1,24[A]$$

$$P = 1,24^2 * 2 = 3,06[W]$$

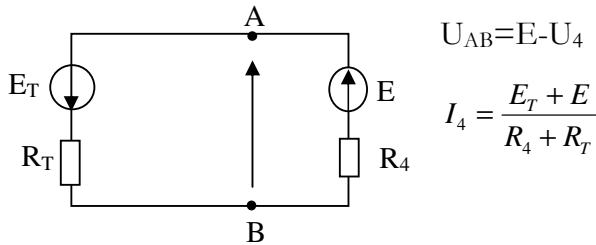
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 10

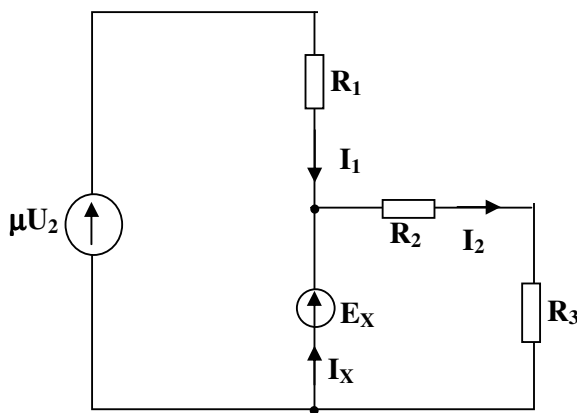
Stosując twierdzenie Thevenina obliczyć prąd I_4 oraz napięcie U_{AB} w układzie:



- $J=5A$
- $E=6V$
- $R_1=0,5\Omega$
- $R_2=1\Omega$
- $R_3=2\Omega$
- $R_4=3\Omega$
- $\mu=2$



$R_T=?$



$E_X=1V$

$U_2 = E_x \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,33[V]$

$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{3}[A]$

$\mu U_2=0,67$

$I_1 = \frac{\mu U_2 - E_x}{R_1} = -\frac{2}{3}$

$I_X + I_1 = I_2$

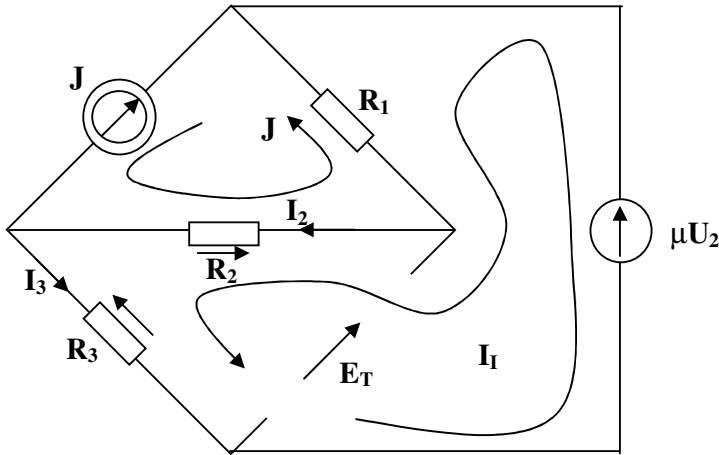
$I_X = I_2 - I_1 = 1[A]$

\Rightarrow

$R_T = \frac{E_X}{I_X} = 1[\Omega]$

TWIERDZENIE THEVENINA

$E_T = ?$



$$\begin{aligned}
 I_1(R_1 + R_2 + R_3) + J(R_1 + R_2) &= \mu U_2 \\
 \mu U_2 = \mu I_2 R_2 = \mu R_2(J + I_1) &= 2 \cdot 1(5 + I_1) \\
 \mu U_2 &= 10 + 2I_1 \\
 3,5I_1 + 5 \cdot 1,5 &= 10 + 2I_1 \\
 3,5I_1 - 2I_1 &= 10 - 7,5 \\
 1,5I_1 &= 2,5 \\
 I_1 &= 1,67 \text{ A} \\
 E_T + U_3 + U_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$E_T = -U_3 - U_2 = -I_3 R_3 - I_2 R_2 = -I_1 R_3 - (J + I_1) R_2 = -67 \cdot 2 - (5 + 1,67) \cdot 1 = -3,34 - 6,67 = -10$$

$E_T = -10 \text{ V}$

$$I_4 = \frac{E_T + E}{R_4 + R_T} = \frac{-10 + 6}{1 + 3} = \frac{-4}{4} = -1$$

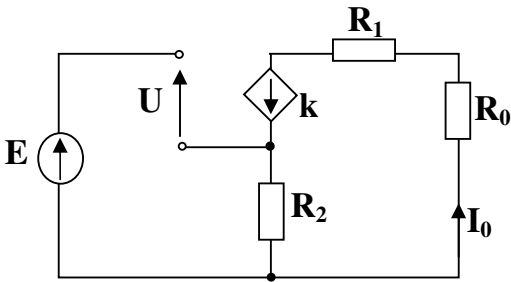
$$U_{AB} = E - U_4 = E - I_4 R_4 = 6 + 1 \cdot 3 = 9$$

$I_4 = -1 \text{ A}$

$U_{AB} = 9 \text{ V}$

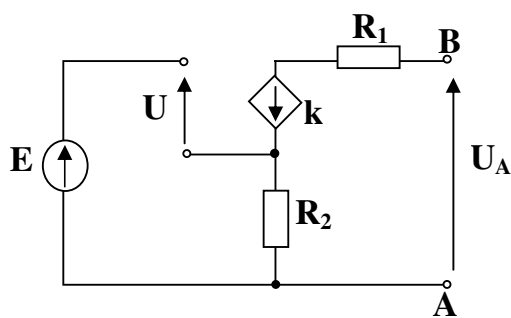
TWIERDZENIE THEVENINA

ZADANIE 11



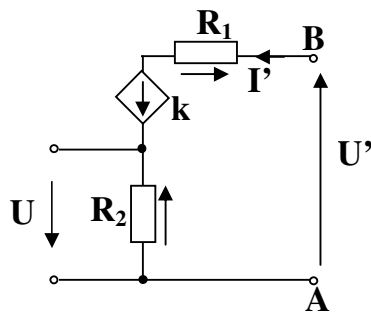
W obwodzie przedstawionym na rysunku wyznaczyć I_0 . Znane są E , k , R_1 , R_2 , R_0

$$E_T = U_{AB}$$



$$U_{AB} = -kU = -kE$$

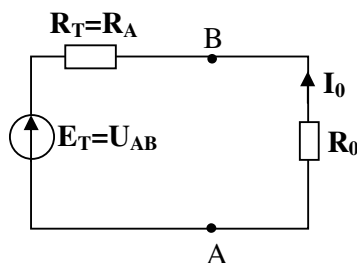
$$R_T = ?$$



$$R_{AB} = \frac{U'}{I'} = \frac{I'(R_1 + R_2) - kU}{I'}$$

$$U = -R_2 I'$$

$$R_{AB} = \frac{I'(R_1 + R_2) + kR_2 I'}{I'} = R_1 + R_2 + kR_2 = R_1 + R_2(1 + k)$$

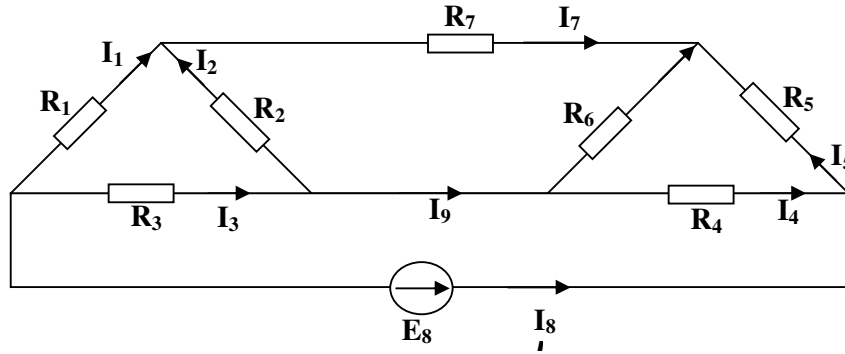


$$I_0 = \frac{-U_{AB}}{R_{AB} + R_0} = \frac{kE}{R_1 + R_2(1 + k) + R_0}$$

TWIERDZENIE THEVENINA

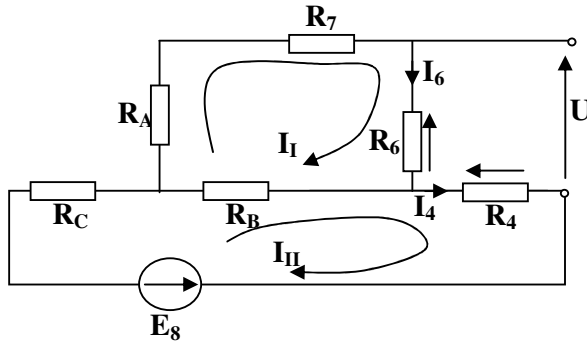
ZADANIE 12

Stosując twierdzenie Thevenina w układzie obliczyć prąd I_5 .



- $E_8 = 96V$
- $R_1 = R_5 = R_7 = 4\Omega$
- $R_2 = 16\Omega$
- $R_3 = R_4 = 24\Omega$
- $R_6 = 12\Omega$

obliczamy wartość napięcia źródła U_T



$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 16}{44} \approx 1,45$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{16 \cdot 24}{44} \approx 8,73$$

$$R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 24}{44} \approx 2,18$$

$$U_T - U_6 - U_4 = 0$$

$$U_T = U_6 + U_4$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -E_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A + R_B + R_6 + R_7 & R_B \\ R_B & R_B + R_C + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,45 + 8,73 + 12 + 4 & 8,73 \\ 8,73 & 8,73 + 2,18 + 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,18 & 8,73 \\ 8,73 & 34,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 26,18 & 8,73 \\ 8,73 & 34,9 \end{vmatrix} = 913,682 - 76,21 = 837,47$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 8,73 \\ -96 & 34,9 \end{vmatrix} = 838,08$$

TWIERDZENIE THEVENINA

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 26,18 & 0 \\ 8,73 & -96 \end{vmatrix} = -2513,28$$

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{838,08}{837,47} \approx 1$$

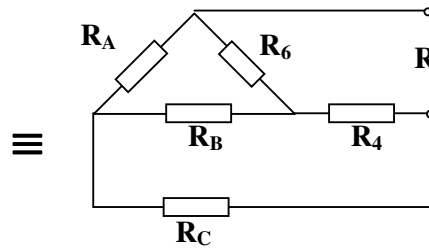
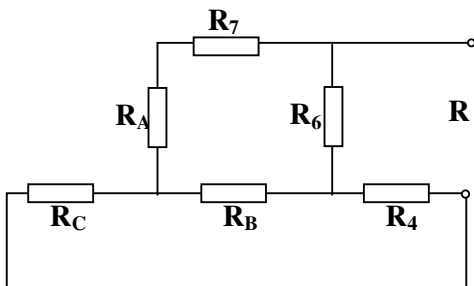
$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2513,28}{837,47} = -3$$

$$I_6 = I_I = 1$$

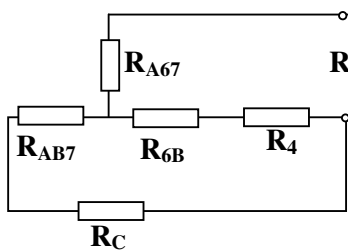
$$I_4 = I_{II} = -3$$

$$U_T = I_6 R_6 + I_4 R_4 = 1 \cdot 12 + 3 \cdot 24 = 84 \text{ [V]}$$

$$R_T = ?$$



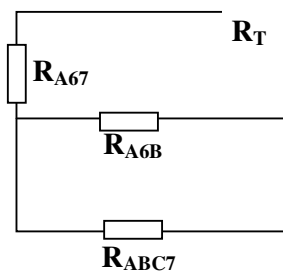
$$R_{A7} = R_A + R_7 = \frac{16}{11} + 4 = 5,45$$



$$R_{A67} = \frac{5,45 \cdot 12}{5,45 + 12 + \frac{96}{11}} = \frac{65,45}{26,18} = 2,5 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{AB7} = \frac{5,45 \cdot \frac{96}{11}}{26,18} = 1,82 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{6B} = \frac{12 \cdot \frac{96}{11}}{26,18} = 4 \text{ [\Omega]}$$



$$R_{A67} = 2,5 \text{ \Omega}$$

$$R_D = R_{46B} \parallel R_{ABC7} = \frac{4 \cdot 28}{32} = 3,5 \text{ \Omega}$$

$$R_T = 2,5 + 3,5 = 6$$

$$I_0 = \frac{U_T}{R_T + R_5} = \frac{84}{6 + 4} = 8,4 \text{ [A]}$$